

Approximation hyperbolique : Hypocoercivité et espaces de Besov Hybrides

Timothée Crin-Barat

Chair of Dynamics, Control and Numerics Department of Data Science, FAU, Erlangen, Germany

Séminaire de Physique Mathématique - EDP
Institut de Mathématiques de Bordeaux
8 Février 2023

Paradoxe de conduction thermique

Un modèle classique pour la conduction thermique est la loi de Fourier :

$$q = -\kappa \nabla T$$

où q est le flux thermique, T est la température, et $\kappa > 0$ est la conductivité thermique.

Un modèle classique pour la conduction thermique est la loi de Fourier :

$$q = -\kappa \nabla T$$

où q est le flux thermique, T est la température, et $\kappa > 0$ est la conductivité thermique.

Avec cette loi, le système de Navier-Stokes compressible dans \mathbb{R}^d s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho u E + u p) - \kappa \Delta T - \operatorname{div}(\tau \cdot u) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Un modèle classique pour la conduction thermique est la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

où \mathbf{q} est le flux thermique, T est la température, et $\kappa > 0$ est la conductivité thermique.

Avec cette loi, le système de Navier-Stokes compressible dans \mathbb{R}^d s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} E + \mathbf{u} p) - \kappa \Delta T - \operatorname{div}(\tau \cdot \mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Un défaut de la loi de Fourier est qu'elle amène à une équation parabolique pour l'équation de la température : toute perturbation initiale est propagée instantanément dans tout le milieu.

Un modèle classique pour la conduction thermique est la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$$

où \mathbf{q} est le flux thermique, T est la température, et $\kappa > 0$ est la conductivité thermique.

Avec cette loi, le système de Navier-Stokes compressible dans \mathbb{R}^d s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} E + \mathbf{u} p) - \kappa \Delta T - \operatorname{div}(\tau \cdot \mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Un défaut de la loi de Fourier est qu'elle amène à une équation parabolique pour l'équation de la température : toute perturbation initiale est propagée instantanément dans tout le milieu.

Et un tel comportement contredit le principe de causalité.

- Pour corriger cela, une solution est d'utiliser la loi de Maxwell-Cattaneo :

$$\varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

où ε est le temps caractéristique de relaxation thermique.

- Pour corriger cela, une solution est d'utiliser la loi de Maxwell-Cattaneo :

$$\varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

où ε est le temps caractéristique de relaxation thermique.

- Essentiellement, $-\Delta T$ est maintenant remplacé par le couplage du 1er ordre (en bleu) suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} E + \mathbf{u} p) + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div}(\tau \cdot \mathbf{u}) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} + \kappa \nabla T = 0, \end{cases} \quad (\text{NSC})$$

- Pour corriger cela, une solution est d'utiliser la loi de Maxwell-Cattaneo :

$$\varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

où ε est le temps caractéristique de relaxation thermique.

- Essentiellement, $-\Delta T$ est maintenant remplacé par le couplage du 1er ordre (en bleu) suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho u E + u p) + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div}(\tau \cdot u) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} + \kappa \nabla T = 0, \end{cases} \quad (\text{NSC})$$

- → Vitesse de propagation finie pour la température.

- Pour corriger cela, une solution est d'utiliser la loi de Maxwell-Cattaneo :

$$\varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

où ε est le temps caractéristique de relaxation thermique.

- Essentiellement, $-\Delta T$ est maintenant remplacé par le couplage du 1er ordre (en bleu) suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho u E + u p) + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div}(\tau \cdot u) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} + \kappa \nabla T = 0, \end{cases} \quad (\text{NSC})$$

- \rightarrow Vitesse de propagation finie pour la température.
- Voyons maintenant comment justifier la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Pour corriger cela, une solution est d'utiliser la loi de Maxwell-Cattaneo :

$$\varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\kappa \nabla T,$$

où ε est le temps caractéristique de relaxation thermique.

- Essentiellement, $-\Delta T$ est maintenant remplacé par le couplage du 1er ordre (en bleu) suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho E) + \operatorname{div}(\rho u E + u p) + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div}(\tau \cdot u) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} + \kappa \nabla T = 0, \end{cases} \quad (\text{NSC})$$

- → Vitesse de propagation finie pour la température.
- Voyons maintenant comment justifier la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
- En plus d'apporter un élément de réponse au paradoxe de conduction thermique, cette procédure relaxe le système de Navier-Stokes et permet d'en simplifier l'étude numérique.

Couplage partiellement dissipatif du 1er ordre

- Durant ma thèse, en collaboration avec Raphaël Danchin, nous avons étudié le système d'Euler compressible amorti :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Ce système peut aussi être vu comme une approximation hyperbolique, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de l'équation des milieux poreux :

$$\partial_t n - \Delta P(n) = 0.$$

- Durant ma thèse, en collaboration avec Raphaël Danchin, nous avons étudié le système d'Euler compressible amorti :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Ce système peut aussi être vu comme une approximation hyperbolique, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de l'équation des milieux poreux :

$$\partial_t n - \Delta P(n) = 0.$$

- Nombreux résultats numériques et théoriques dans le cas mono-dimensionnel : Jin-Xin, Junca-Rascle etc.

- Durant ma thèse, en collaboration avec Raphaël Danchin, nous avons étudié le système d'Euler compressible amorti :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Ce système peut aussi être vu comme une approximation hyperbolique, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de l'équation des milieux poreux :

$$\partial_t n - \Delta P(n) = 0.$$

- Nombreux résultats numériques et théoriques dans le cas mono-dimensionnel : Jin-Xin, Junca-Rascle etc.
- Convergence faible dans le cas multi-dimensionnel : Coulombel-Lin-Goudon, Xu-Kawashima

- Durant ma thèse, en collaboration avec Raphaël Danchin, nous avons étudié le système d'Euler compressible amorti :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Ce système peut aussi être vu comme une approximation hyperbolique, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de l'équation des milieux poreux :

$$\partial_t n - \Delta P(n) = 0.$$

- Nombreux résultats numériques et théoriques dans le cas mono-dimensionnel : Jin-Xin, Junca-Rascle etc.
- Convergence faible dans le cas multi-dimensionnel : Coulombel-Lin-Goudon, Xu-Kawashima
- Nous justifions cette limite de relaxation forte dans \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$ pour des solutions fortes étant des petites perturbations d'états d'équilibre constants du type $(\bar{\rho}, \bar{u}) = (1, 0)$.

- Durant ma thèse, en collaboration avec Raphaël Danchin, nous avons étudié le système d'Euler compressible amorti :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Ce système peut aussi être vu comme une approximation hyperbolique, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de l'équation des milieux poreux :

$$\partial_t n - \Delta P(n) = 0.$$

- Nombreux résultats numériques et théoriques dans le cas mono-dimensionnel : Jin-Xin, Junca-Rascle etc.
- Convergence faible dans le cas multi-dimensionnel : Coulombel-Lin-Goudon, Xu-Kawashima
- Nous justifions cette limite de relaxation forte dans \mathbb{R}^d avec $d \geq 1$ pour des solutions fortes étant des petites perturbations d'états d'équilibre constants du type $(\bar{\rho}, \bar{u}) = (1, 0)$.
- Méthode : Estimations a priori uniformes en utilisant une décomposition de Littlewood-Paley et en empruntant des outils de la théorie de l'hypo-coercivité.

La linéarisation autour de l'état d'équilibre du système d'Euler en dimension 1 est :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases}$$

- **But** : obtenir des estimations uniforme en ε .

La linéarisation autour de l'état d'équilibre du système d'Euler en dimension 1 est :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases}$$

- **But** : obtenir des estimations uniforme en ε .
- **Première difficulté** : Comment gérer l'aspect *partiellement dissipatif* ?

La linéarisation autour de l'état d'équilibre du système d'Euler en dimension 1 est :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases}$$

- **But** : obtenir des estimations uniforme en ε .
- **Première difficulté** : Comment gérer l'aspect *partiellement dissipatif* ?
En effet, une estimation d'énergie donne

$$\frac{d}{dt} \|(\rho, u)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^2}^2 = 0.$$

→ **Révèle un manque de coercivité** : pas d'informations sur ρ .

La linéarisation autour de l'état d'équilibre du système d'Euler en dimension 1 est :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases}$$

- **But** : obtenir des estimations uniforme en ε .
- **Première difficulté** : Comment gérer l'aspect *partiellement dissipatif* ?
En effet, une estimation d'énergie donne

$$\frac{d}{dt} \|(\rho, u)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^2}^2 = 0.$$

→ **Révèle un manque de coercivité : pas d'informations sur ρ .**

- **Idee**: Inspiré par la théorie de l'hypo-coercivité, considérons la fonctionnelle perturbée suivante :

$$\mathcal{L}^2 = \|(\rho, u, \partial_x \rho, \partial_x u)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} u \partial_x \rho.$$

En dérivant en temps celle-ci, on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|(u, \partial_x u)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\partial_x \rho\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Hypocoercivité hyperbolique

Pour des systèmes hyperboliques partiellement dissipatif de la forme

$$\partial_t U + A \partial_x U + BU = 0 \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec } D > 0,$$

l'idée précédente fonctionne sous la condition suivante :

Hypo-coercivité hyperbolique

Pour des systèmes hyperboliques partiellement dissipatif de la forme

$$\partial_t U + A \partial_x U + BU = 0 \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec } D > 0,$$

l'idée précédente fonctionne sous la condition suivante :

Definition (Shizuta-Kawashima '80s)

$$\ker B \cap \{\text{vecteurs propres de } A\} = \{0\}. \quad (\text{SK})$$

Pour des systèmes hyperboliques partiellement dissipatif de la forme

$$\partial_t U + A\partial_x U + BU = 0 \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D > 0,$$

l'idée précédente fonctionne sous la condition suivante :

Definition (Shizuta-Kawashima '80s)

$$\ker B \cap \{\text{vecteurs propres de } A\} = \{0\}. \quad (\text{SK})$$

Il s'avère que cette condition est en fait équivalente à la condition de rang de Kalman pour le couple (B, A) .

Pour des systèmes hyperboliques partiellement dissipatif de la forme

$$\partial_t U + A \partial_x U + BU = 0 \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D > 0,$$

l'idée précédente fonctionne sous la condition suivante :

Definition (Shizuta-Kawashima '80s)

$$\ker B \cap \{\text{vecteurs propres de } A\} = \{0\}. \quad (\text{SK})$$

Il s'avère que cette condition est en fait équivalente à la condition de rang de Kalman pour le couple (B, A) .

Inspiré par cela et par la théorie de l'hypocoercivité, Beauchard et Zuazua ont construit la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{L} \triangleq \|U\|_{H^1}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I} \quad \text{où} \quad \mathcal{I} \triangleq \Im \sum_{k=1}^{n-1} c_k (BA^{k-1} \hat{U} \cdot BA^k \hat{U}).$$

Pour des systèmes hyperboliques partiellement dissipatif de la forme

$$\partial_t U + A \partial_x U + BU = 0 \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D > 0,$$

l'idée précédente fonctionne sous la condition suivante :

Definition (Shizuta-Kawashima '80s)

$$\ker B \cap \{\text{vecteurs propres de } A\} = \{0\}. \quad (\text{SK})$$

Il s'avère que cette condition est en fait équivalente à la condition de rang de Kalman pour le couple (B, A) .

Inspiré par cela et par la théorie de l'hypo coercivité, Beauchard et Zuazua ont construit la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{L} \triangleq \|U\|_{H^1}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I} \quad \text{où} \quad \mathcal{I} \triangleq \Im \sum_{k=1}^{n-1} c_k (BA^{k-1} \widehat{U} \cdot BA^k \widehat{U}).$$

A nouveau, en dérivant en temps cette fonctionnelle, si la condition (SK) est satisfaite alors

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} + \kappa \min(1, |\xi|^2) \mathcal{L} \leq \quad \text{et} \quad \mathcal{L} \sim \|U\|_{H^1}$$

- **Deuxième difficulté:** les taux de décroissance dépendent de la fréquence ξ et du paramètre ε .

- **Deuxième difficulté:** les taux de décroissance dépendent de la fréquence ξ et du paramètre ε .

A partir de l'estimation précédente, on obtient (formellement)

$$\frac{d}{dt} \|(\rho, u)\|_{L^2} + \min\left(\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon|\xi|^2\right) \|(\rho, u)\|_{L^2} \leq 0.$$

- **Deuxième difficulté:** les taux de décroissance dépendent de la fréquence ξ et du paramètre ε .

A partir de l'estimation précédente, on obtient (formellement)

$$\frac{d}{dt} \|(\rho, u)\|_{L^2} + \min\left(\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon|\xi|^2\right) \|(\rho, u)\|_{L^2} \leq 0.$$

- En basses fréquences $|\xi| < \frac{1}{\varepsilon}$, la solution se comporte comme celle de l'équation de la chaleur.
- Et, en hautes fréquences, $|\xi| > \frac{1}{\varepsilon}$, la solution est exponentiellement amortie.

- **Deuxième difficulté:** les taux de décroissance dépendent de la fréquence ξ et du paramètre ε .

A partir de l'estimation précédente, on obtient (formellement)

$$\frac{d}{dt} \|(\rho, u)\|_{L^2} + \min\left(\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon|\xi|^2\right) \|(\rho, u)\|_{L^2} \leq 0.$$

- En basses fréquences $|\xi| < \frac{1}{\varepsilon}$, la solution se comporte comme celle de l'équation de la chaleur.
- Et, en hautes fréquences, $|\xi| > \frac{1}{\varepsilon}$, la solution est exponentiellement amortie.
- Pour $U = (\rho, u)$, on a

$$\|U^h(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \leq C e^{-\lambda t} \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)},$$

$$\|U^\ell(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \leq C t^{-\frac{d}{2}} \|U_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)}$$

où U^h et U^ℓ correspondent respectivement aux hautes et basses fréquences de la solution.

- Ces techniques d'*hypo-coercivité hyperbolique* ne permettent pas d'extraire toutes les informations sur le système linéaire.
- Concernant les hautes fréquences, cette approche est suffisante, mais pour les basses fréquences il manque des propriétés cruciales.
- Et comme nous allons le voir, utiliser des techniques différentes en hautes et basses fréquences est essentiel pour gérer la limite de relaxation.

Revenons au p -système amorti

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Une analyse spectrale de la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ i\xi & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

montre que

Revenons au p -système amorti

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Une analyse spectrale de la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ i\xi & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

montre que

- En basses fréquences ($|\xi| \ll \frac{1}{\varepsilon}$), deux valeurs propres **réelles** : $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\varepsilon\xi^2$.

Revenons au p -système amorti

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Une analyse spectrale de la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ i\xi & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

montre que

- En basses fréquences ($|\xi| \ll \frac{1}{\varepsilon}$), deux valeurs propres **réelles** : $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\varepsilon\xi^2$.
- En hautes fréquences, ($|\xi| \gg \frac{1}{\varepsilon}$), deux valeurs propres complexes conjugués, dont les parties réelle sont asymptotiquement égales à $\frac{1}{2\varepsilon}$.

Revenons au p -système amorti

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Une analyse spectrale de la matrice associée au système :

$$\begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ i\xi & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

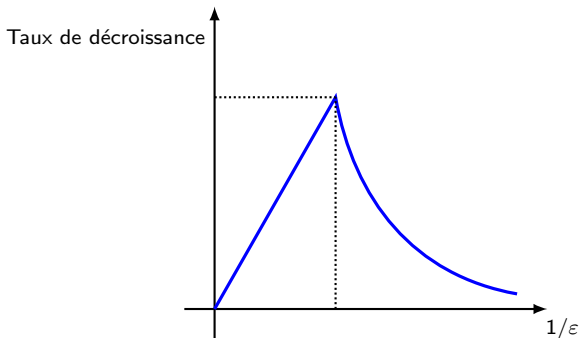
montre que

- En basses fréquences ($|\xi| \ll \frac{1}{\varepsilon}$), deux valeurs propres **réelles** : $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\varepsilon\xi^2$.
- En hautes fréquences, ($|\xi| \gg \frac{1}{\varepsilon}$), deux valeurs propres complexes conjugués, dont les parties réelle sont asymptotiquement égales à $\frac{1}{2\varepsilon}$.
- Le seuil entre les hautes et basses fréquences se situe à $\frac{1}{\varepsilon}$.

- Le comportement asymptotique de la solution lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ n'est pas si intuitif.

- Le comportement asymptotique de la solution lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ n'est pas si intuitif.
 - Naïvement, on s'attend à ce que lorsque le coefficient d'amortissement augmente alors le taux de dissipation augmente.

- Le comportement asymptotique de la solution lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ n'est pas si intuitif.
 - Naïvement, on s'attend à ce que lorsque le coefficient d'amortissement augmente alors le taux de dissipation augmente.
 - Cependant, le phénomène d'*overdamping* se produit : **les taux de décroissance sont directement lié à $\min(\varepsilon, 1/\varepsilon)$.**



- Pour gérer ce phénomène, ne pas garder les fréquences "mélangées" et séparer les deux régimes au seuil $\frac{1}{\varepsilon}$ est crucial.

Nouvel objectif : reproduire l'analyse spectral au niveau des estimations a priori.

- Pour bien prendre en compte que le comportement des solutions dépend de la région fréquentielle étudiée, nous travaillons avec des normes d'espace de Besov hybrides :

$$\|f\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^s}^h \triangleq \sum_{j \geq \frac{1}{\varepsilon}} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2} \quad \text{and} \quad \|f\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{s'}}^\ell \triangleq \sum_{j \leq \frac{1}{\varepsilon}} 2^{js'} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p}$$

où $\dot{\Delta}_j$ est un opérateur localisant la transformée de Fourier d'une distribution dans un anneau. En particulier, on a la décomposition dyadique : $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f$.

- Pour bien prendre en compte que le comportement des solutions dépend de la région fréquentielle étudiée, nous travaillons avec des normes d'espace de Besov hybrides :

$$\|f\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^s}^h \triangleq \sum_{j \geq \frac{1}{\varepsilon}} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2} \quad \text{and} \quad \|f\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{s'}}^\ell \triangleq \sum_{j \leq \frac{1}{\varepsilon}} 2^{js'} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p}$$

où $\dot{\Delta}_j$ est un opérateur localisant la transformée de Fourier d'une distribution dans un anneau. En particulier, on a la décomposition dyadique : $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f$.

- Voyons maintenant comment récupérer la propriété "manquante" dans le régime des basses fréquences.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0, \end{cases}$$

- Pour bien prendre en compte que le comportement des solutions dépend de la région fréquentielle étudiée, nous travaillons avec des normes d'espace de Besov hybrides :

$$\|f\|_{\mathbb{B}_{2,1}^s}^h \triangleq \sum_{j \geq \frac{1}{\varepsilon}} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2} \quad \text{and} \quad \|f\|_{\mathbb{B}_{p,1}^{s'}}^\ell \triangleq \sum_{j \leq \frac{1}{\varepsilon}} 2^{js'} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p}$$

où $\dot{\Delta}_j$ est un opérateur localisant la transformée de Fourier d'une distribution dans un anneau. En particulier, on a la décomposition dyadique : $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f$.

- Voyons maintenant comment récupérer la propriété "manquante" dans le régime des basses fréquences.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + \partial_x \rho + \frac{u}{\varepsilon} = 0, \end{cases}$$

En définissant le mode amorti $w = u + \varepsilon \partial_x \rho$, le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \varepsilon \partial_{xx}^2 \rho = -\partial_x w \\ \partial_t w + \frac{w}{\varepsilon} = -\varepsilon \partial_{xx}^2 u. \end{cases}$$

En localisant en fréquences, pour $j \leq \frac{1}{\varepsilon}$, on a

$$\begin{cases} \partial_t \dot{\Delta}_j \rho - \varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j \rho = -\partial_x \dot{\Delta}_j w, \\ \partial_t \dot{\Delta}_j w + \frac{\dot{\Delta}_j w}{\varepsilon} = -\varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j u. \end{cases}$$

En localisant en fréquences, pour $j \leq \frac{1}{\varepsilon}$, on a

$$\begin{cases} \partial_t \dot{\Delta}_j \rho - \varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j \rho = -\partial_x \dot{\Delta}_j w, \\ \partial_t \dot{\Delta}_j w + \frac{\dot{\Delta}_j w}{\varepsilon} = -\varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j u. \end{cases}$$

- Il est maintenant possible d'étudier les deux équations séparément sans perdre de dérivées. En effet, grâce à l'inégalité de Bernstein, les termes sources peuvent être absorbés dans le régime basses fréquences :

$$\|\partial_x f\|_{B_{p,1}^s}^\ell \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{B_{p,1}^s}^\ell.$$

En localisant en fréquences, pour $j \leq \frac{1}{\varepsilon}$, on a

$$\begin{cases} \partial_t \dot{\Delta}_j \rho - \varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j \rho = -\partial_x \dot{\Delta}_j w, \\ \partial_t \dot{\Delta}_j w + \frac{\dot{\Delta}_j w}{\varepsilon} = -\varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j u. \end{cases}$$

- Il est maintenant possible d'étudier les deux équations séparément sans perdre de dérivées. En effet, grâce à l'inégalité de Bernstein, les termes sources peuvent être absorbés dans le régime basses fréquences :

$$\|\partial_x f\|_{B_{p,1}^s}^\ell \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{B_{p,1}^s}^\ell.$$

- De plus, on peut travailler dans des **espaces** L^p dans ce régime !

En localisant en fréquences, pour $j \leq \frac{1}{\varepsilon}$, on a

$$\begin{cases} \partial_t \dot{\Delta}_j \rho - \varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j \rho = -\partial_x \dot{\Delta}_j w, \\ \partial_t \dot{\Delta}_j w + \frac{\dot{\Delta}_j w}{\varepsilon} = -\varepsilon \partial_{xx}^2 \dot{\Delta}_j u. \end{cases}$$

- Il est maintenant possible d'étudier les deux équations séparément sans perdre de dérivées. En effet, grâce à l'inégalité de Bernstein, les termes sources peuvent être absorbés dans le régime basses fréquences :

$$\|\partial_x f\|_{B_{p,1}^s}^\ell \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{B_{p,1}^s}^\ell.$$

- De plus, on peut travailler dans des **espaces** L^p dans ce régime !
- En effet, on obtient aisément

$$\|(\rho, w)\|_{B_{p,1}^s}^\ell + \varepsilon \|\rho\|_{L_T^1(B_{p,1}^{s+2})}^\ell + \frac{1}{\varepsilon} \|w\|_{L_T^1(B_{p,1}^s)}^\ell \leq \|(\rho_0, w_0, u_0)\|_{B_{p,1}^s}^\ell$$

- En raison de la partie imaginaire des valeurs propres en hautes fréquences, une telle diagonalisation partielle n'est pas envisageable, et on est restreint au cadre L^2 .
- Néanmoins, nous sommes capable de travailler dans ce cadre $L^2 - L^p$.

On rappelle que le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Pour le système nonlinéaire, le mode amorti vérifiant de meilleures propriétés en basses fréquences est :

$$w = u + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho}$$

qui est directement associé à la loi de Darcy.

On rappelle que le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Pour le système nonlinéaire, le mode amorti vérifiant de meilleures propriétés en basses fréquences est :

$$w = u + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho}$$

qui est directement associé à la loi de Darcy.

En insérant ce mode dans la première équation de (E), on obtient

$$\partial_t \rho - \Delta P(\rho) = \operatorname{div} w.$$

On rappelle que le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t u + u \cdot \nabla u) + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho} + u = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Pour le système nonlinéaire, le mode amorti vérifiant de meilleures propriétés en basses fréquences est :

$$w = u + \frac{\nabla P(\rho)}{\rho}$$

qui est directement associé à la loi de Darcy.

En insérant ce mode dans la première équation de (E), on obtient

$$\partial_t \rho - \Delta P(\rho) = \operatorname{div} w.$$

Puis en utilisant la borne $\|w\|_{L^1_T(B_{\rho,1}^s)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ on est capable de justifier le résultat de relaxation suivant.

Theorem (Danchin, C-B, Math. Ann. 2022)

Soit $d \geq 1$, $p \in [2, 4]$ et $\varepsilon > 0$.

- Soit $\bar{\rho}$ une constante strictement positive et $(\rho - \bar{\rho}, v)$ la solution de l'équation d'Euler compressible associé à la donnée initiale ρ_0^ε .
- Soit $\mathcal{N} \in C_b(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})$ l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{N} - \Delta P(\mathcal{N}) = 0 \\ \mathcal{N}(0, x) = \mathcal{N}_0 \in \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}} \end{cases}$$

Si

$$\|\rho_0^\varepsilon - \mathcal{N}_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}} \leq C\varepsilon,$$

alors

$$\|\rho^\varepsilon - \mathcal{N}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})} + \|\rho^\varepsilon - \mathcal{N}\|_{L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} + \left\| \frac{\nabla P(\rho^\varepsilon)}{\rho^\varepsilon} + v^\varepsilon \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} \leq C\varepsilon.$$

- Reproduire l'analyse précédente dans le cadre d'espaces de Sobolev ne permet pas (à ma connaissance) d'obtenir un taux de convergence.
- On obtient seulement $\|w\|_{L_T^2(H^s)} = \mathcal{O}(1)$ (au lieu de $\|w\|_{L_T^1(B_{2,1}^s)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$)

- Reproduire l'analyse précédente dans le cadre d'espaces de Sobolev ne permet pas (à ma connaissance) d'obtenir un taux de convergence.
- On obtient seulement $\|w\|_{L_T^2(H^s)} = \mathcal{O}(1)$ (au lieu de $\|w\|_{L_T^1(B_{2,1}^s)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$)
- Il faut faire attention en justifiant la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet, rappelons que le seuil entre les hautes et basses fréquences est situé en $\frac{1}{\varepsilon}$.
- Donc, formellement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, les basses fréquences recouvrent tout l'espace de fréquences et les hautes fréquences disparaissent.
- Cela est cohérent car le système limite vérifie des propriétés similaires aux basses fréquences de la solution du système hyperbolique.

Application au système de Navier-Stokes-Cattaneo

Nous venons de voir comment l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

peut être approchée, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, par le système hyperbolique

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div} v = 0 \\ \varepsilon^2 \partial_t v + \nabla u + v = 0. \end{cases}$$

- Notre but est maintenant de voir dans quelle mesure cette approximation peut être utilisée pour approcher des systèmes modélisant des phénomènes physiques.

Nous venons de voir comment l'équation de la chaleur

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

peut être approchée, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, par le système hyperbolique

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div} v = 0 \\ \varepsilon^2 \partial_t v + \nabla u + v = 0. \end{cases}$$

- Notre but est maintenant de voir dans quelle mesure cette approximation peut être utilisée pour approcher des systèmes modélisant des phénomènes physiques.

Rappelons que le système de Navier-Stokes-Cattaneo se formule :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = \operatorname{div} \tau, \\ \partial_t(\rho T) + \operatorname{div}(\rho u T + u p) + \operatorname{div} q - \operatorname{div}(\tau \cdot u) = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t q + q + \kappa \nabla T = 0. \end{cases} \quad (\text{NSCC})$$

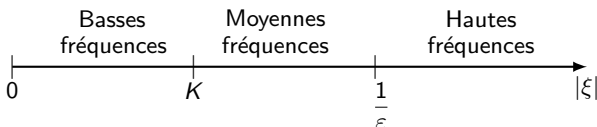
Voyons comment justifier la convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Tout d'abord, il nous faut des informations sur le système limite. Danchin a montré que les solutions du système limite ont un comportement différent dans les régimes $|\xi| \leq K$ et $|\xi| \geq K$ où K est une constante.

- Tout d'abord, il nous faut des informations sur le système limite. Danchin a montré que les solutions du système limite ont un comportement différent dans les régimes $|\xi| \leq K$ et $|\xi| \geq K$ où K est une constante.
- De l'autre côté, on vient de voir que relaxer le système par un couplage hyperbolique partiellement dissipative suggère aussi de considérer deux régimes fréquentiels distincts (séparé en $\frac{1}{\varepsilon}$).

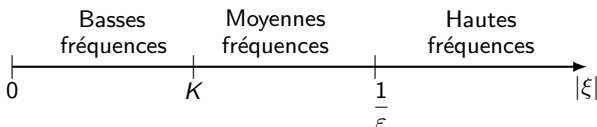
- Tout d'abord, il nous faut des informations sur le système limite. Danchin a montré que les solutions du système limite ont un comportement différent dans les régimes $|\xi| \leq K$ et $|\xi| \geq K$ où K est une constante.
- De l'autre côté, on vient de voir que relaxer le système par un couplage hyperbolique partiellement dissipative suggère aussi de considérer deux régimes fréquentiels distincts (séparé en $\frac{1}{\varepsilon}$).

Par conséquent, il est naturel de découper l'espace de fréquences ainsi :



- Tout d'abord, il nous faut des informations sur le système limite. Danchin a montré que les solutions du système limite ont un comportement différent dans les régimes $|\xi| \leq K$ et $|\xi| \geq K$ où K est une constante.
- De l'autre côté, on vient de voir que relaxer le système par un couplage hyperbolique partiellement dissipative suggère aussi de considérer deux régimes fréquentiels distincts (séparé en $\frac{1}{\varepsilon}$).

Par conséquent, il est naturel de découper l'espace de fréquences ainsi :



Formellement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, cela signifie que :

- Le régime des basses fréquences n'est pas modifié.
- Les moyennes fréquences recouvrent les hautes fréquences.
- Le régime des hautes fréquences disparaît.

A nouveau cela est cohérent avec le fait qu'à la limite on retrouve le comportement attendu.

Afin de justifier cette pré-analyse, nous utilisons, pour $p \in [1, \infty]$ et $s \in \mathbb{R}$, les espaces de Besov suivants :

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s}^\ell := \sum_{j \leq J_0} 2^{js} \|f_j\|_{L^2}, \quad \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s}^{m,\varepsilon} := \sum_{J_0 \leq j \leq J_\varepsilon} 2^{js} \|f_j\|_{L^2}$$

et $\|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s}^{h,\varepsilon} := \sum_{j \geq J_\varepsilon - 1} 2^{js} \|f_j\|_{L^2}$

où $J_0 = K$, pour $K > 0$ une constante, et $J_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$.

Afin de justifier cette pré-analyse, nous utilisons, pour $p \in [1, \infty]$ et $s \in \mathbb{R}$, les espaces de Besov suivants :

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s}^\ell := \sum_{j \leq J_0} 2^{js} \|f_j\|_{L^2}, \quad \|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s}^{m,\varepsilon} := \sum_{J_0 \leq j \leq J_\varepsilon} 2^{js} \|f_j\|_{L^2}$$

et $\|f\|_{\dot{B}_{p,1}^s}^{h,\varepsilon} := \sum_{j \geq J_\varepsilon - 1} 2^{js} \|f_j\|_{L^2}$

où $J_0 = K$, pour $K > 0$ une constante, et $J_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$.

Et pour conclure, dans chaque régime, des méthodes différentes sont utilisées : hypocoercivité + diagonalisation partielle en trouvant les bons mode amortis.

Extensions

- Dans quelle mesure cette relaxation hyperbolique peut être utilisée?
Schémas numériques, systèmes généraux, systèmes non conservatifs..

- Dans quelle mesure cette relaxation hyperbolique peut être utilisée?
Schémas numériques, systèmes généraux, systèmes non conservatifs..
- Est-ce que ça fonctionne avec d'autres opérateurs ?

- Dans quelle mesure cette relaxation hyperbolique peut être utilisée?
Schémas numériques, systèmes généraux, systèmes non conservatifs..
- Est-ce que ça fonctionne avec d'autres opérateurs ?

En collaboration avec Roberta Bianchini et Marius Paicu, nous avons montré que les solutions stablement stratifiées de l'équation des milieux poreux incompressible :

$$\partial_t \rho - \mathcal{R}_1^2 \rho = 0$$

peut être approché par le système de Boussinesq stratifié :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathcal{R}_1 b = 0, \\ \varepsilon \partial_t b + \mathcal{R}_1 \rho + b = 0 \end{cases} \quad (2DB)$$

où $\mathcal{R}_1 = \frac{\partial_1}{\sqrt{-\Delta}}$.

- Dans quelle mesure cette relaxation hyperbolique peut être utilisée?
Schémas numériques, systèmes généraux, systèmes non conservatifs..
- Est-ce que ça fonctionne avec d'autres opérateurs ?

En collaboration avec Roberta Bianchini et Marius Paicu, nous avons montré que les solutions stablement stratifiées de l'équation des milieux poreux incompressible :

$$\partial_t \rho - \mathcal{R}_1^2 \rho = 0$$

peut être approché par le système de Boussinesq stratifié :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathcal{R}_1 \mathbf{b} = 0, \\ \varepsilon \partial_t \mathbf{b} + \mathcal{R}_1 \rho + \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (2DB)$$

où $\mathcal{R}_1 = \frac{\partial_1}{\sqrt{-\Delta}}$.

Pour justifier cela nous utilisons une décomposition de Littlewood-Paley anisotrope afin de récupérer la borne Lipschitz $L_T^1(W^{1,\infty})$ sur la solution. Cette fois sans séparation des régimes fréquentiels.

- Dans quelle mesure cette relaxation hyperbolique peut être utilisée?
Schémas numériques, systèmes généraux, systèmes non conservatifs..
- Est-ce que ça fonctionne avec d'autres opérateurs ?

En collaboration avec Roberta Bianchini et Marius Paicu, nous avons montré que les solutions stablement stratifiées de l'équation des milieux poreux incompressible :

$$\partial_t \rho - \mathcal{R}_1^2 \rho = 0$$

peut être approché par le système de Boussinesq stratifié :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathcal{R}_1 \mathbf{b} = 0, \\ \varepsilon \partial_t \mathbf{b} + \mathcal{R}_1 \rho + \mathbf{b} = 0 \end{cases} \quad (2DB)$$

où $\mathcal{R}_1 = \frac{\partial_1}{\sqrt{-\Delta}}$.

Pour justifier cela nous utilisons une décomposition de Littlewood-Paley anisotrope afin de récupérer la borne Lipschitz $L_T^1(W^{1,\infty})$ sur la solution. Cette fois sans séparation des régimes fréquentiels.

- Question : Sous quelles conditions est-ce qu'un opérateur peut-il être approché de cette manière ?

Merci pour votre attention !



T. Crin-Barat, R. Danchin, Global existence for partially dissipative hyperbolic systems in the L^p framework, and relaxation limit, *Mathematische Annalen*, 2022.



T. Crin-Barat, R. Danchin, Partially dissipative hyperbolic systems in the critical regularity setting: The multi-dimensional case. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2022.



R. Bianchini, T. Crin-Barat, M. Paicu, Relaxation approximation and asymptotic stability of stratified solutions to the IPM equation. [arXiv:2210.02118](https://arxiv.org/abs/2210.02118)