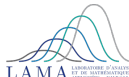


Systèmes hyperboliques partiellement dissipatifs et applications à la mécanique des fluides

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Est Sup
Présentée par Crin-Barat Timothée



UNIVERSITÉ
PARIS-EST CRÉTEIL
VAL DE MARNE



Thèse effectuée au sein du LAMA (Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées)

Soutenue devant le jury composé de :

Raphaël Danchin

Karine Beauchard
Sylvie Benzoni-Gavage
Roberto Natalini

Jean-François Coulombel
Didier Bresch
Denis Serre

1 Introduction

- Littérature classique
- Méthode de Beauchard et Zuazua
- Objectifs de la thèse

2 Systèmes symétriques partiellement dissipatifs

- Analyse préliminaire
- Estimations a priori
- Résultats principaux

3 Étude de phénomènes de relaxation

- Présentation du problème
- Résultat principal
- Remarques et idée de preuve

Introduction

Introduction

Un système général de lois de conservation à n composantes s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial F_j(V)}{\partial x_j} = Q(V), \quad \text{où } V : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{O}_V \subset \mathbb{R}^n \\ (t, x) \rightarrow V = V(t, x) \end{cases} \quad (1)$$

est l'inconnue du problème à valeurs dans un sous-ensemble ouvert convexe \mathcal{O}_V de \mathbb{R}^n et $Q, F_j : \mathcal{O}_V \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions régulières sur \mathcal{O}_V .

Ces systèmes modélisent des phénomènes physiques ayant une vitesse de propagation finie et/ou des lois de conservations, par exemple :

- l'équation d'Euler compressible en dynamique des gaz, l'équation de Maxwell en électromagnétisme, l'équation d'Einstein en relativité générale, l'équation de la magnétohydrodynamique, l'équation des ondes, l'équation de Yang-Mills, l'équation de l'elastodynamique, etc.
- Applications au monde physique multiples : mécanique des fluides non visqueux, théorie cinétique, astrophysique, modélisation de trafic routier, circulation dans les vaisseaux sanguins, etc.

- Dans la plupart des applications au monde physique, il est cohérent de prendre en compte des phénomènes de dissipation qui, par exemple, modélisent des effets d'amortissement dûs à des forces de frottements.
→ C'est ce que modélise le terme d'ordre 0 $Q(V)$ dans notre analyse.
- On s'intéresse à l'existence globale-en-temps de solutions fortes et régulières pour des données initiales $V_0(x) = V(0, x)$ proche d'un équilibre constant $\bar{V} \in \mathbb{R}^n$ tel que $Q(\bar{V}) = 0$.
- → Dépend fortement de la forme de Q :
 - Si $Q(V) = 0$, il existe des solutions locales-en-temps qui développent des singularités en temps fini, même si les données initiales sont des petites perturbations régulières d'états d'équilibre constant. (A. Majda, D. Serre)
 - Hypothèse de *dissipation totale*: $Q(V) = -BV$ avec $B > 0$. Dans ce cas, le terme de dissipation agit directement sur chaque composante du système et donc la solution tend exponentiellement rapidement vers \bar{V} . (T-T Li)

Dissipation partielle

En pratique, une hypothèse plus raisonnable est que **la dissipation n'agisse seulement sur certaines composantes du système.**

Cela peut s'écrire :

$$Q(V) = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^{n_1}} \\ q(V) \end{pmatrix} \text{ où } q(V) \in \mathbb{R}^{n_2}, n_1, n_2 \in \mathbb{N} \text{ et } n_1 + n_2 = n. \quad (2)$$

- \rightarrow Apparaît dans de nombreuses applications en dynamique des gaz ou pour dans les simulations numériques de lois de conservation via schéma de relaxation.
- Notre exemple d'application principal est le système d'Euler compressible isentropique avec amortissement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P + \rho u = 0, \end{cases} \quad (E)$$

- Pour ce système, les travaux de W. Wang et T. Yang '01 et T. Sideris, B. Thomases et D. Wang '03, répondent à notre question dans le cadre des espaces de Sobolev.
- Question : pour un système plus général quand est-ce que la dissipation partielle empêche la formation de singularités?

Condition (SK)

- Dans les années 80, Shizuta et Kawashima ont développé un critère algébrique de stabilité linéaire : la condition (SK). Cette condition assure que *l'amortissement est assez fort pour empêcher que les solutions provenant de petites perturbation d'états constants développent des singularités en temps fini*.
- Pour fixer les idées, analysons le système linéaire à n composantes suivant :

$$\partial_t V + \sum_{j=1}^d \bar{A}^j \partial_{x_j} V + LV = 0$$

où les $\bar{A}^j \triangleq A^j(\bar{V})$ et L sont des matrices symétriques constantes.
On suppose que l'inconnue V vérifie les décompositions suivantes :

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

où $V_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $V_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ pour $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 + n_2 = n$.

- Grâce à l'hypothèse de symétrie sur les matrices \bar{A}^j , la méthode d'énergie classique (produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$ de (7) avec V) conduit à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|_{L^2}^2 + (LV|V) = 0.$$

- Les hypothèses sur L nous donne directement qu'il existe $\kappa_0 > 0$ tel que

$$(LV|V) \geq \kappa_0 \|V_2\|_{L^2}^2 \quad \text{pour tout } V \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n). \quad (3)$$

Et donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|_{L^2}^2 + \kappa_0 \|V_2\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

- \Rightarrow Manque de coercivité qui, en général, empêche de conclure l'existence globale-en-temps.
- C'est ici que la condition (SK) rentre en jeu. Nous allons voir qu'il est possible de récupérer des informations sur la composante V_1 , sous certaines conditions, grâce à l'interaction entre l'amortissement et le transport.

Condition (SK)

- On applique la transformée de Fourier :

$$\widehat{V}_t + iA(\xi)\widehat{V} + L\widehat{V} = 0 \quad \text{avec} \quad A(\xi) \triangleq \sum_{j=1}^d \bar{A}^j \xi_j.$$

Definition

La condition (SK) est définie ainsi :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \ker L \cap \{\text{vecteurs propres de } A(\xi)\} = \{0\}. \quad (\text{SK})$$

- Shizuta et Kawashima montrent alors que si le système considéré vérifie la condition (SK) alors la solution V satisfait :

$$\begin{aligned} \|V^h(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} &\leq Ce^{-\lambda t} \|V_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)}, \\ \|V^\ell(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} &\leq Ct^{-\frac{d}{2}} \|V_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (4)$$

où V^h et V^ℓ correspondent, respectivement, aux hautes et basses fréquences de la solution

- Au niveau linéaire, on observe donc les phénomènes suivants :
 - En hautes fréquences, la solution décroît exponentiellement vers l'état d'équilibre.
 - En basses fréquences, la solution se comporte comme les solutions de l'équation de la chaleur.
- Cela est possible grâce à l'équivalence entre la condition (SK) et l'existence d'une matrice anti-symétrique $K(\omega)$ telle que

$$[K_\omega A_\omega]' + L \text{ est définie positive, où } A_\omega = \sum_{j=1}^d A^j \omega_j, \xi = \rho \omega$$

et $[X]'$ est la partie symétrique de X .

- Un grand nombre de résultats avec cette condition en main :
 - Hanouzet et Natalini '03, Ruggeri et Serre '04, Yong '04, Kawashima et Yong '04, '09 et Kawashima et Xu '14
 - Bianchini, Hanouzet et Natalini '07 et Kawashima et Xu '15.

La méthode de Beauchard et Zuazua

Un autre point de vue : La méthode de Beauchard et Zuazua

Le résultat classique sur lequel se base leur article est le suivant :

Proposition

Soient A et L deux matrices $n \times n$ à coefficients réels. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1 le couple (A, L) satisfait la condition (SK);
- 2 le couple (A, L) vérifie la condition de rang de Kalman : le rang de $(L \quad AL \quad \dots \quad A^{n-1}L)$ vaut n ;
- 3 pour tout $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1} > 0$, la fonction $y \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k |LA^k y|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur \mathbb{C}^n .

\Rightarrow Lien entre la stabilité de ces systèmes, la théorie de l'observabilité et la théorie de l'hypo-coercivité.

Méthode de Beauchard et Zuazua

Inspiré par les outils en théorie du contrôle, pour compenser le manque de coercivité mis en évidence précédemment, ils introduisent la fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{L} \triangleq \|V\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \min(\rho, \rho^{-1}) \mathcal{I} \quad \text{avec} \quad \mathcal{I} \triangleq \Im \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k (LA_\omega^{k-1} \widehat{V} \cdot LA_\omega^k \widehat{V})$$

pour $n - 1$ paramètres positifs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$.

Puis en dérivant en temps la fonctionnelle \mathcal{L} et en ajustant les coefficients ε_k , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} + \mathcal{H} \leq 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{H} \triangleq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \min(1, \rho^2) |LA_\omega^k \widehat{V}(\xi)|^2 d\xi.$$

- Si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ sont assez petits, alors $\mathcal{L} \sim \|V\|_{L^2}^2$
- Est-ce que \mathcal{H} est similaire à $\|V\|_{L^2}^2$?

Méthode de Beauchard et Zuazua

La réponse dépend des propriétés du support de \widehat{V}_0 et des éventuelles annulations de la quantité $\mathcal{N}_{*,\bar{v}}$ définie par

$$\mathcal{N}_{*,\bar{v}} \triangleq \inf \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k |LA_{\omega}^k x|^2; x \in \mathbb{S}^{n-1}, \omega \in \mathbb{S}^{d-1} \right\}.$$

La proposition précédente \Rightarrow la condition (SK) est satisfaite par (A_{ω}, L) pour tout $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ si et seulement si $\mathcal{N}_{*,\bar{v}} > 0$.

Donc il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\mathcal{H} \geq \kappa \min(1, |\xi|^2) \mathcal{L}$$

Ce qui nous amène à

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} + \kappa \min(1, |\xi|^2) \mathcal{L} \leq 0$$

Méthode de Beauchard et Zuazua

Au niveau linéaire et sous la condition (SK), Beauchard et Zuazua parviennent à récupérer la décomposition obtenue par Kawashima d'une manière simple :

- Dans le régime hautes fréquences $\min(1, |\xi|^2) = 1$, ce qui implique une décroissance exponentielle vers l'état d'équilibre.
- Dans le régime basses fréquences $\min(1, |\xi|^2) = |\xi|^2$, ce qui révèle un comportement parabolique sur toutes les composantes de la solution.
- Méthode plus explicite que celle de Kawashima \rightarrow plus adaptée pour gérer les systèmes non-linéaires.
- Pour le système d'Euler compressible, une fonctionnelle de Lyapunov possible est

$$\mathcal{L}^2 = \|(a, u, \partial_x a, \partial_x u)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \min(1, |\xi|^2) \int_{\mathbb{R}} u \cdot \partial_x a$$

où $a = \rho - \bar{\rho}$ avec $\bar{\rho} > 0$. Dans le cas linéaire on obtient aisément

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}^2 + \min(1, |\xi|^2) \mathcal{L}^2 \leq 0$$

- Leur méthode permet aussi de couvrir certains cas où la condition (SK) n'est pas vérifiée.

Objectifs de la thèse

Objectifs de la thèse

Objectifs de la thèse

- Travailler dans le cadre des espaces de Besov homogènes *hybrides* et *critiques*.
 - Norme de Besov *hybride* := norme de Besov avec des indices de régularité et/ou de Lebesgue différent en hautes et basses fréquences.
 - *Critique* := conditions optimales de petitesse permettant de justifier le caractère globalement bien posé du système. Correspondant au plus grand espace dans lequel on peut obtenir l'unicité de solutions fortes.
- → Informations plus précises sur les propriétés qualitatives des solutions construites et plus grande classe de données initiales sous contrôle.
- → Utile pour étudier des problèmes de limite de relaxation et obtenir des taux de convergences explicites.
- → Méthode robuste pouvant être appliqué ou adapté à un large panel de système : Système d' Euler compressible amorti, le système de chemotaxis hyperbolique-parabolique, système de Baer-Nunziato amorti. . .

Pour mieux comprendre où s'inscrit notre amélioration, il faut avoir à l'esprit les injections suivantes :

$$H^s(s > \frac{d}{2} + 1) \hookrightarrow B_{2,1}^{\frac{d}{2}+1} \hookrightarrow \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1} \hookrightarrow \dot{B}_{p,1}^{\frac{d}{p}} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1} (p > 2) \hookrightarrow \mathcal{C}^1.$$

Comment ?

- Séparer l'étude des hautes et basses fréquences i.e. régularité des données initiales différente en fonction du régime.
- En hautes fréquences : fonctionnelle de Lyapunov dans l'esprit de celle de Beauchard et Zuazua \Rightarrow évite l'utilisation d'une fonction de compensatrice.
- En basse fréquences : l'aspect parabolique n'est pas suffisant pour conclure.
 - Une analyse spectrale révèle l'existence d'un mode amorti vérifiant une décroissance temporelle plus forte que la solution entière.
 \rightarrow essentiel pour boucler les estimations.
 - De plus, les valeurs propres en basses fréquences sont asymptotiquement réelles et il est donc envisageable d'obtenir une solution dans des espaces de Besov basé sur des L^p avec $p > 2$
 \rightarrow à nouveau rendu possible grâce au mode amorti.
- L'inspiration de ce mode amorti provient des travaux de Hoff et Haspot concernant le système de Navier-Stokes compressible.

Systèmes symétriques partiellement dissipatifs

Soit \bar{V} un état d'équilibre constant tel que $L\bar{V} = 0$. Pour $Z = V - \bar{V}$, on s'intéresse au système

$$\partial_t Z + \sum_{k=1}^d A^k(V) \partial_k Z + \frac{LZ}{\varepsilon} = 0 \quad (5)$$

où les matrices A^k sont symétriques et l'opérateur L vérifie $L + L^T \geq 0$.

On suppose que (5) est *partiellement dissipatif* :

(i) L'image et le noyau de L vérifie

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(L) \oplus^\perp \text{Im}(L).$$

(ii) La restriction de L à $\text{Im}(L)$, L_2 satisfait pour un $c > 0$, une condition de positivité :

$$\forall V_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, (L_2 V_2 | V_2) \geq c |V_2|^2. \quad (6)$$

En supposant de plus que $\ker L = \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$ et $\text{Im}(L) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n_2}$, alors en utilisant les décompositions par blocs

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \quad LV = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 V_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^k = \begin{pmatrix} A_{1,1}^k & A_{1,2}^k \\ A_{2,1}^k & A_{2,2}^k \end{pmatrix},$$

le système (5) peut être réécrit :

$$\begin{cases} \partial_t Z_1 + \sum_{k=1}^d \left(A_{1,1}^k(V) \partial_k Z_1 + A_{1,2}^k(V) \partial_k Z_2 \right) = 0, \\ \partial_t Z_2 + \sum_{k=1}^d \left(A_{2,1}^k(V) \partial_k Z_1 + A_{2,2}^k(V) \partial_k Z_2 \right) + \frac{L_2 Z_2}{\varepsilon} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Décomposition de Littlewood-Paley

- On définit $\dot{\Delta}_j$ les blocs dyadiques tels que pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j f \quad \text{et} \quad \text{supp}(\widehat{\dot{\Delta}_j f}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \frac{3}{4}2^j \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}2^j\}.$$

- L'une des motivations principales de cette décomposition est l'inégalité de Bernstein : pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$C2^{jk} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p} \leq \|D^k \dot{\Delta}_j f\|_{L^p} \leq C2^{jk} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p}.$$

- Les semi-normes homogènes de Besov classiques sont définies ainsi :

$$\|f\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^s} \triangleq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^p}.$$

Espace de Besov Hybride

Pour un $J_0 \in \mathbb{Z}$ et pour $s, s' \in \mathbb{R}$ on définit les normes hautes et basses fréquences de la manière suivante, pour $f_j \triangleq \dot{\Delta}_j f$,

- norme restreinte aux hautes fréquences : $\|f\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{s, J_0}}^{h, J_0} \triangleq \sum_{j \geq J_0} 2^{js} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2}$,
- norme restreinte aux basses fréquences : $\|f\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{s', J_0}}^{\ell, J_0} \triangleq \sum_{j \leq J_0} 2^{js'} \|\dot{\Delta}_j f\|_{L^2}$.
- De même on définit

$$f^{\ell, J_0} \triangleq \sum_{j \leq J_0} f_j \quad \text{et} \quad f^{h, J_0} = \sum_{j \geq J_0} f_j.$$

→ La difficulté est maintenant de choisir les bons indices de régularité s et s' pour les données initiales.

- On sait qu'en général il est nécessaire de contrôler ∇Z dans $L^1_T(L^\infty)$ pour pouvoir boucler les estimations a priori.
- Donc, en prenant en compte l'injection $\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{d/2} \hookrightarrow L^\infty$ et le comportement parabolique en basses fréquences et purement amorti en hautes fréquences, on est tenté de choisir $s' = \frac{d}{2} - 1$ and $s = \frac{d}{2} + 1$ i.e.

$$Z_0^\ell \in \dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}-1} \quad \text{et} \quad Z_0^h \in \dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}.$$

- En effet, au niveau linéaire, on obtiendrait bien $Z^\ell, Z^h \in L^1_T(\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})$.
- Ce cadre permet d'obtenir un résultat d'existence globale avec le moins d'hypothèses de structure possible.
- Cependant, cet indice basses fréquences n'est pas idéal en pratique :
 - N'inclut pas le cas $d = 1$.
 - "Mauvaise" dépendance par rapport au paramètre de relaxation.

- En pratique, les systèmes d'applications ont souvent une structure plus précise et par exemple, nos calculs à *la main* sur le système d'Euler montrent qu'il est possible de travailler avec $s' = \frac{d}{2}$.
- Inspiré par cela, voici les hypothèses que nous faisons pour obtenir un résultat pour le système général : pour tout $1 \leq k \leq d$

$$A_{1,1}^k(\bar{V}) = 0 \quad (8)$$

$$Z \mapsto A_{1,1}^k(V) \text{ est linéaire par rapport à } Z_2. \quad (9)$$

$$Z \rightarrow A^k(V) \text{ est linéaire} \quad (10)$$

- Hypothèse vérifiées par le système d'Euler compressible réécrit avec la symétrisation de Kawashima-Makino-Ukai.

Obtention des estimations a priori

Schéma de l'obtention des estimations a priori

- On étudie le cas $\varepsilon = 1$ qui n'est pas restrictif grâce au changement de variable :

$$Z(t, x) \triangleq \check{Z}\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

- En effet on peut récupérer la dépendance par rapport à ε grâce à l'homogénéité de nos normes :

$$C^{-1} \lambda^{b(s-\frac{d}{p})-\frac{a}{r}} \|u\|_{L_T^r(\dot{B}_{p,1}^s)} \leq \|u(\lambda^a \cdot, \lambda^b \cdot)\|_{L_T^r(\dot{B}_{p,1}^s)} \leq C \lambda^{b(s-\frac{d}{p})-\frac{a}{r}} \|u\|_{L_T^r(\dot{B}_{p,1}^s)}. \quad (11)$$

Les basses fréquences dans un cas simple

Voyons tout d'abord comme procéder dans un cas simple, pour le p-système amorti :

$$\begin{cases} \partial_t a + \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + \partial_x a + u = 0, \end{cases}$$

En définissant $w = u + \partial_x a$, le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t a - \partial_{xx}^2 a = -\partial_x z \\ \partial_t z + z = -\partial_{xx}^2 u. \end{cases}$$

→ On retrouve les deux comportements observé par l'analyse spectrale.

→ Il est possible d'étudier les deux équations de manière découplé, si les termes sources sont absorbables dans le régime basses fréquences.

Ce qui est bien le cas car, pour $s \leq s'$, on a la propriété suivante

$$\|f\|_{\dot{B}_{2,1}^{s',J_0}}^{\ell,J_0} \lesssim 2^{J_0(s'-s)} \|f\|_{\dot{B}_{2,1}^{s,J_0}}^{\ell,J_0}. \quad (12)$$

Cas général basses fréquences

Dans le cas général, en définissant le mode amorti :

$$W \triangleq Z_2 + \sum_{k=1}^d L_2^{-1} (A_{2,1}^k(V) \partial_k Z_1 + A_{2,2}^k(V) \partial_k Z_2) = -L_2^{-1} \partial_t Z_2$$

le système se réécrit

$$\begin{cases} \partial_t W + L_2 W = g \\ \partial_t Z_1 - \sum_{k=1}^d \sum_{\ell=1}^d \bar{A}_{1,2}^k L_2^{-1} \bar{A}_{2,1}^\ell \partial_k \partial_\ell Z_1 = f \end{cases} \quad (13)$$

où f et g sont contrôlable dans le régime basses fréquences si k_p est assez petit.

Cas général basses fréquences

Pour étudier l'équation de Z_1 , on a la proposition suivante

Lemma

Supposons que $\forall k \in \{1, \dots, d\}$, $\bar{A}_{1,1}^k = 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- Le système (5) satisfait la condition (SK) en \bar{V} ;
- l'opérateur $\mathcal{A} := \sum_{k=1}^d \sum_{\ell=1}^d \bar{A}_{1,2}^k L_2^{-1} \bar{A}_{2,1}^\ell \partial_k \partial_\ell$ est fortement elliptique.

→ On peut étudier les deux équations de W et Z_1 séparément, la première comme une équation amortie et la deuxième comme une équation de la chaleur. Les conditions de structures sont là pour nous assurer que ça fonctionne.

Hautes fréquences

Concernant les hautes fréquences, en s'inspirant des arguments développés par Beauchard et Zuazua, on considère la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{L}_j \triangleq \|Z_j\|_{L^2}^2 + 2^{-j} \mathcal{I}_j \quad \text{si } j \geq J_0,$$

avec

$$\mathcal{I}_j \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \mathfrak{S} \left((LA_\omega^{k-1} \widehat{Z}_j) \cdot (LA_\omega^k \widehat{Z}_j) \right) d\xi,$$

où les $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} > 0$ sont choisis assez petits pour que $\mathcal{L} \sim \|Z\|_{L^2}^2$.
Pour tout $j \geq J_0$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_j + \kappa_0 \mathcal{L}_j \lesssim \textit{nonlinear terms}.$$

Difficulté : les termes non linéaires contiennent une petite quantité de basses fréquences qui n'appartienne qu'à des espace du type $\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^s$ pour $p > 2$ et donc pas dans des $\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^s$.

→ Étude plus précise des estimations de commutateurs, lois de produit dans notre cadre fonctionnel 'hybride' et c'est la raison pour laquelle les hypothèses de linéarité sont nécessaires.

Résultats principaux

Réécriture du système d'Euler

Pour une loi de pression satisfaisant :

$$P(\rho) = A\rho^\gamma \quad \text{pour } \gamma > 1 \quad \text{et} \quad A > 0. \quad (14)$$

on considère l'inconnue

$$c = \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \frac{(4\gamma A)^{\frac{1}{2}}}{\gamma - 1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

appelée vitesse du son. En définissant $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma - 1}{2}$ et $\tilde{c} = c - \bar{c}$ où \bar{c} est une constante positive, on peut réécrire le système d'Euler compressible sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{c} + v \cdot \nabla \tilde{c} + \tilde{\gamma}(\tilde{c} + \bar{c}) \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t v + v \cdot \nabla v + \tilde{\gamma}(\tilde{c} + \bar{c}) \nabla \tilde{c} + \frac{1}{\varepsilon} v = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Ce système vérifie bien les hypothèses pour pouvoir lui appliquer notre théorème d'existence général avec

$$W = \frac{v}{\varepsilon} + \tilde{\gamma}(\tilde{c} + \bar{c}) \nabla \tilde{c}.$$

Résultats principaux

Theorem (Danchin, C-B '21)

Soient $d \geq 1$, $p \in [2, 4]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $k_p \in \mathbb{Z}$ et $c_0 = c_0(p) > 0$ tel que pour tout $J_\varepsilon \triangleq \lfloor -\log_2 \varepsilon \rfloor + k_p$, si on suppose $\tilde{c}^{\ell, J_\varepsilon}, v_0^{\ell, J_\varepsilon} \in \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+1}$ et $\tilde{c}^{h, J_\varepsilon}, v_0^{h, J_\varepsilon} \in \dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}$ avec

$$\|(\tilde{c}, v_0)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+1}}^{\ell, J_\varepsilon} + \varepsilon \|(\tilde{c}, v_0)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^{h, J_\varepsilon} \leq c_0,$$

alors le système d'Euler admet une unique solution globale (\tilde{c}, v) vérifiant

$$X_{p,\varepsilon}(t) \lesssim \|(\tilde{c}, v_0)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+1}}^{\ell, J_\varepsilon} + \varepsilon \|(\tilde{c}, v_0)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^{h, J_\varepsilon} \quad \text{pour tout } t \geq 0, \text{ et où}$$

$$\begin{aligned} X_{p,\varepsilon}(t) \triangleq & \varepsilon \|(\tilde{c}, v)\|_{L_t^\infty(\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}^{h, J_\varepsilon} + \|(\tilde{c}, v)\|_{L_t^1(\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1})}^{h, J_\varepsilon} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|v\|_{L_t^2(\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+1})} \\ & + \|(\tilde{c}, v)\|_{L_t^\infty(\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+1})}^{\ell, J_\varepsilon} + \varepsilon \|\tilde{c}\|_{L_t^1(\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+2})}^{\ell, J_\varepsilon} + \|v\|_{L_t^1(\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+1})}^{\ell, J_\varepsilon} + \|W\|_{L_t^1(\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{2}+1})}. \end{aligned}$$

Remarques

- Le seuil $J_\varepsilon = \lfloor -\log_2 \varepsilon \rfloor + k_p$, correspond à l'endroit où les termes d'ordres 0 et les termes d'ordre 1 ont le même poids (paramètre inclus).
- k_p est une constante, indépendante de ε , choisie "assez négative" pour absorber certains termes en basses fréquences.
- Il est possible d'obtenir ce même résultat avec $s' = \frac{d}{p} - 1$ mais dans ce cas la condition de petitesse devient

$$\frac{1}{\varepsilon} \|Z_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}}^{\ell, J_\varepsilon} + \varepsilon \|Z_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^{h, J_\varepsilon} \leq c_0.$$

- Nous sommes également en mesure d'obtenir un résultat de décroissance en temps vers l'état d'équilibre dans le cas $p = 2$.
- Les bornes uniformes obtenues dans ce théorème sont des propriétés très utiles pour étudier la limite de relaxation.

Phénomènes de relaxation

Limite de relaxation lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

En reprenant les notations des articles de Coulombel, Goudon et Lin, on introduit la variable *en temps lent* $\tau = \varepsilon t$ et on effectue le changement de variable diffusif suivant :

$$(\tilde{\rho}_\varepsilon, \tilde{J}_\varepsilon)(\tau, x) = \left(\rho, \frac{\rho u}{\varepsilon}\right)(t, x). \quad (16)$$

Le couple $(\tilde{\rho}_\varepsilon, \tilde{J}_\varepsilon)$ vérifie alors le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_\tau \tilde{\rho}_\varepsilon + \nabla \cdot \tilde{J}_\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2 \left(\partial_\tau \tilde{J}_\varepsilon + \operatorname{div} \left(\frac{\tilde{J}_\varepsilon \otimes \tilde{J}_\varepsilon}{\tilde{\rho}_\varepsilon} \right) \right) + \nabla P(\tilde{\rho}_\varepsilon) + \tilde{J}_\varepsilon = 0. \end{cases} \quad (17)$$

En utilisant les bornes uniformes obtenues pour $\tilde{\rho}_\varepsilon$ et \tilde{J}_ε lors de la preuve du caractère bien posé, on peut montrer qu'au sens des distributions, on a

$$-\tilde{J}_\varepsilon - \nabla P(\tilde{\rho}_\varepsilon) \xrightarrow{*} 0 \quad \text{et donc} \quad \partial_\tau \tilde{\rho}_\varepsilon - \Delta P(\tilde{\rho}_\varepsilon) \xrightarrow{*} 0.$$

Et donc, grâce à des arguments de compacité, $\tilde{\rho}_\varepsilon$ converge fortement (localement-en-espace) vers \mathcal{N} , la solution de l'équation des milieux poreux :

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathcal{N} - \Delta P(\mathcal{N}) = 0, \\ \mathcal{N}_{\tau=0} = \rho_0 \end{cases} \quad (18)$$

Littérature

- Plus précisément, Coulombel, Goudon et Lin '07, '13 justifient la convergence forte locale-en-espace du système d'Euler vers l'équation des milieux poreux dans des espaces de Sobolev avec indice de régularité $s > \frac{d}{2} + 1$.
- Puis Xu, Wang et Kawashima justifient la limite de relaxation dans des espaces de Besov critiques non-homogènes.
- Ici, nous nous inscrivons dans la continuité de ces résultats.

Theorem (Danchin, C-B '21)

Soient $d \geq 1$, $p \in [2, 4]$ et $\varepsilon > 0$. Soient $\bar{\rho}$ une constante strictement positive et $(\rho - \bar{\rho}, v)$ la solution du système d'Euler obtenue via le théorème précédent.

Soient la fonction positive \mathcal{N}_0 telle que $\mathcal{N}_0 - \bar{\rho}$ est assez petit dans $\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}}$, et $\mathcal{N} \in C_b(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}+2})$ l'unique solution globale correspondante du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{N} - \Delta P(\mathcal{N}) = 0 \\ \mathcal{N}(0, x) = \mathcal{N}_0 \end{cases}$$

Si on suppose que

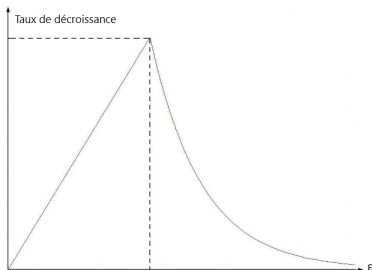
$$\|\tilde{\rho}_0^\varepsilon - \mathcal{N}_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}} \leq C\varepsilon,$$

alors

$$\|\tilde{\rho}^\varepsilon - \mathcal{N}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})} + \|\tilde{\rho}^\varepsilon - \mathcal{N}\|_{L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} + \left\| \frac{\nabla P(\tilde{\rho}^\varepsilon)}{\tilde{\rho}^\varepsilon} + \tilde{v}^\varepsilon \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}})} \leq C\varepsilon.$$

Remarques et idée de preuve

- Le comportement asymptotique de la solution du système d'Euler lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ n'est pas si intuitif en réalité.
 - A première vue, lorsque le coefficient d'amortissement devient de plus en plus grand on s'attend à ce que le phénomène de dissipation soit de plus en plus dominant.
 - Cependant, il se produit ce qu'on appelle l'effet d'*overdamping* : le taux de décroissance n'augmente pas lorsque le coefficient d'amortissement augmente et au contraire se comporte plutôt comme $\min(\varepsilon, 1/\varepsilon)$.



- Cela peut se voir concrètement avec une analyse spectrale. Dans l'espace de Fourier, le système linéarisé d'Euler a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & i\xi \\ i\xi & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que :

- le discriminant du polynôme caractéristique étant égal à $\frac{1}{\varepsilon^2} - 4\xi^2$, la coupure entre les hautes et basses fréquences se situe au niveau de $\frac{1}{2\varepsilon}$.
- en basses fréquences (i.e. $|\xi| \ll \varepsilon^{-1}$), cette matrice a deux valeurs propres réelles qui tendent respectivement vers $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\varepsilon\xi^2$ pour ξ proche de 0;
- en hautes fréquences (i.e. $|\xi| \gg \varepsilon^{-1}$), deux valeurs propres complexes conjuguées coexistent, dont les parties réelles sont asymptotiquement égales à $\frac{1}{2\varepsilon}$.

→ Essentiel d'avoir un seuil entre les hautes et les basses fréquences qui dépend de ε pour étudier la limite de relaxation.

- Dans les approches précédentes, toutes les fréquences étaient "mélangées"
→ l'aspect dissipatif en basses fréquences n'était pas pleinement exploité car le comportement global qui ressort d'un mixage des fréquences est toujours le "moins bon".
- Comme $J_\varepsilon = \lfloor -\log_2 \varepsilon \rfloor + k_p$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, heuristiquement, cela implique que les basses fréquences recouvrent tout l'espace de fréquences.
- Ceci peut être, d'une certaine manière, justifié en remarquant que le comportement du système limite est purement parabolique tout comme le système initial dans le régime de basses fréquences.

Éléments de preuve

En utilisant le changement de variable diffusif introduit précédemment :

$$(\tilde{c}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon)(\tau, x) = (c, \frac{v}{\varepsilon})(t, x).$$

Le couple $(\tilde{c}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon)$ vérifie alors

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{c}^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon \cdot \nabla \tilde{c}^\varepsilon + \tilde{\gamma} \tilde{c}^\varepsilon \operatorname{div} \tilde{v}^\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2 (\partial_t \tilde{v}^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}^\varepsilon) + \tilde{\gamma} \tilde{c}^\varepsilon \nabla \tilde{c}^\varepsilon + \tilde{v}^\varepsilon = 0. \end{cases} \quad (19)$$

A partir des bornes uniformes provenant du théorème d'existence et le fait que

$$\tilde{\gamma} \tilde{c}^\varepsilon \nabla \tilde{c}^\varepsilon = \frac{\nabla P(\tilde{\rho}^\varepsilon)}{\tilde{\rho}^\varepsilon},$$

il est possible de récupérer des informations sur l'inconnue initiale $\tilde{\rho}^\varepsilon$.

Lemma

Soit (\tilde{c}, v) la solution du système (15) obtenue avec le théorème d'existence. Alors, pour tout $t \geq 0$, $\tilde{\rho}^\varepsilon$ satisfait l'estimation suivante :

$$\|\tilde{\rho}^\varepsilon - \bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\mathbb{B}_{\rho,1}^{\frac{d}{p}})} + \|\tilde{\rho}^\varepsilon - \bar{\rho}\|_{L_t^2(\mathbb{B}_{\rho,1}^{\frac{d}{p}+1})} + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \tilde{v}^\varepsilon + \frac{\nabla P(\tilde{\rho}^\varepsilon)}{\tilde{\rho}^\varepsilon} \right\|_{L_t^1(\mathbb{B}_{\rho,1}^{\frac{d}{p}})} \leq c_0.$$

→ Point clé : ces bornes ne sont pas restreintes à un régime de fréquences.

Cela nous permet d'estimer la différence des solutions de l'équation limite et de l'équation initiale :

$$\partial_t \mathcal{N} - \Delta P(\mathcal{N}) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{\rho}^\varepsilon + \operatorname{div}(\tilde{\rho}^\varepsilon \tilde{v}^\varepsilon) = 0.$$

En utilisant le mode amorti $\tilde{W}^\varepsilon = \tilde{v}^\varepsilon + \frac{\nabla P(\tilde{\rho}^\varepsilon)}{\rho}$, l'équation de $\tilde{\rho}^\varepsilon$ peut se réécrire:

$$\partial_t \tilde{\rho}^\varepsilon - \Delta P(\tilde{\rho}^\varepsilon) = S^\varepsilon \quad \text{avec} \quad S^\varepsilon = -\operatorname{div}(\tilde{\rho}^\varepsilon \tilde{W}^\varepsilon).$$

Les bornes uniformes nous donnent alors que

$$\|\tilde{W}^\varepsilon\|_{L_t^1(\mathbb{B}_{\rho,1}^{\frac{d}{p}})} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|\tilde{\rho}^\varepsilon - \bar{\rho}\|_{L_t^\infty(\mathbb{B}_{\rho,1}^{\frac{d}{p}})} = \mathcal{O}(1).$$

Et donc, avec des lois de produits et estimations de composition, on obtient que

$$\|S^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

De plus, les équations étant sous une forme similaire, nous pouvons estimer leur différence. On définit $\delta D^\varepsilon \triangleq \tilde{\rho}^\varepsilon - \mathcal{N}$ qui vérifie

$$\partial_t \delta D^\varepsilon - \Delta(P(\tilde{\rho}^\varepsilon) - P(\mathcal{N})) = S^\varepsilon.$$

En utilisant que :

- $\|\tilde{\rho}_0^\varepsilon - \mathcal{N}_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}} \leq \varepsilon$
- Le fait qu'il existe une fonction régulière H_1 s'annulant en $\bar{\rho} = \tilde{\mathcal{N}}$ telle que

$$P(\tilde{\rho}^\varepsilon) - P(\bar{\rho}) = P'(\bar{\rho})(\tilde{\rho}^\varepsilon - \bar{\rho}) + H_1(\tilde{\rho}^\varepsilon)(\tilde{\rho}^\varepsilon - \bar{\rho}),$$

- La condition $P'(\bar{\rho}) > 0$, des lois de produits et lemme de composition nous assure alors que

$$\|\delta D^\varepsilon\|_{L_T^\infty(\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}-1})} + \|\delta D^\varepsilon\|_{L_T^1(\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}+1})} \lesssim \varepsilon.$$

Merci !

Perspectives

Systeme multi-fluide amorti

Présentation du système

Ici je présente les travaux en collaboration avec Cosmin Burtea et Jin Tan.

Nous considérer le système de Baer-Nunziato amorti :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_{\pm} + u \cdot \nabla \alpha_{\pm} = \pm \frac{\alpha_+ \alpha_-}{2\mu + \lambda} (P_+(\rho_+) - P_-(\rho_-)), \\ \partial_t (\alpha_{\pm} \rho_{\pm}) + \operatorname{div}(\alpha_{\pm} \rho_{\pm} u) = 0, \\ \partial_t (\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P + \eta \rho u = 0, \\ \rho = \alpha_+ \rho_+ + \alpha_- \rho_-, \\ P = \alpha_+ P_+(\rho_+) + \alpha_- P_-(\rho_-) \end{array} \right. \quad (BN)$$

- Difficile de le mettre sous forme symétrique
 - Les équations des fractions volumiques ne peuvent pas s'écrire sous forme conservatives.
 - L'entropie qui est naturellement associé à ce système n'es t pas définie positive car elle est linéaire par rapport aux fractions volumiques.
- Le système ne satisfait pas la condition (SK)
 - En effet, le système quasi-linéaire associé admet la valeur propre 0.

Buts

Notre but principal est de justifier la limite de relaxation (visqueuse) lorsque les données initiales $(\alpha_{\pm 0}, \rho_{\pm 0}, u_0)$ sont proches d'un état d'équilibre constant $(\bar{\alpha}_{\pm}, \bar{\rho}_{\pm}, 0)$.

Formellement, lorsque $\nu := 2\mu + \lambda$ tend vers 0, le système converge vers le système de Kapila suivant :

$$\begin{cases} \alpha_+ + \alpha_- = 1, \\ \partial_t(\alpha_{\pm}\rho_{\pm}) + \operatorname{div}(\alpha_{\pm}\rho_{\pm}u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P + \eta \rho u = 0, \\ \rho = \alpha_+\rho_+ + \alpha_-\rho_-, \\ P = P_+(\rho_+) = P_-(\rho_-). \end{cases} \quad (K)$$

Dans la mesure où nous nous attendons à ce que les pressions à la limite soient égales et afin d'éviter l'apparition de couches limites près de l'instant initial, nous supposons que les pressions sont à l'équilibre à l'infini :

$$\bar{P} \triangleq P_+(\bar{\rho}_+) = P_-(\bar{\rho}_-). \quad (20)$$

- Il s'avère que la situation n'est pas trop dégénérée dans le sens où l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 et que, grosso modo, la partie non dégénérée (c'est-à-dire la partie associée aux valeurs propres non nulles) remplit la condition (SK).
- Nous réécrivons alors le système (BN) en termes de nouvelles variables afin de mettre en évidence un sous-système, pour lequel le linéarisé vérifie la condition (SK), qui est couplée à travers des termes d'ordre inférieur avec une équation de transport.
- Nous construisons une fonction d'énergie pondérée appropriée qui nous permet d'aborder le manque de symétrie du système, fournit des informations sur la décroissance en temps et nous permet d'obtenir des estimations uniforme par rapport au paramètre de relaxation.

Principaux résultats

Theorem

Soit $d \geq 2$. On suppose que : $\mu \geq 0, \lambda + \mu \geq 0, \nu \leq 1$ et $\eta \geq 1$. Il existe une constante $c_1 > 0$ indépendante des coefficients de viscosité μ et λ telle que pour toute donnée initiale $(\alpha_{\pm 0}, \alpha_{\mp 0}, \rho_{\pm 0}, \rho_{\mp 0}, u_0)$ satisfaisant

$$\|(\alpha_{\pm 0} - \bar{\alpha}_{\pm}, \rho_{\pm 0} - \bar{\rho}_{\pm}, u_0)\|_{B^{\frac{d}{2}-1} \cap B^{\frac{d}{2}+1}} \leq c_1,$$

alors le système admet une unique solution globale telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{\pm} - \bar{\alpha}_{\pm}, \rho_{\pm} - \bar{\rho}_{\pm}, u) \in C_b(\mathbb{R}_+; B^{\frac{d}{2}-1} \cap B^{\frac{d}{2}+1}), \\ \frac{P_+(\rho_+) - P_-(\rho_-)}{2\mu + \lambda} \in L^1(\mathbb{R}_+; B^{\frac{d}{2}-1} \cap B^{\frac{d}{2}}) \quad \text{et} \quad u \in L^1(\mathbb{R}_+; B^{\frac{d}{2}} \cap B^{\frac{d}{2}+1}). \end{array} \right.$$

De plus, les estimations suivantes sont satisfaites

$$\|(\alpha_{\pm} - \bar{\alpha}_{\pm}, \rho_{\pm} - \bar{\rho}_{\pm}, u)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; B^{\frac{d}{2}-1} \cap B^{\frac{d}{2}+1})} + \|u\|_{L^1(\mathbb{R}_+; B^{\frac{d}{2}} \cap B^{\frac{d}{2}+1})} \\ \frac{1}{2\mu + \lambda} \|P_+(\rho_+) - P_-(\rho_-)\|_{L^1(\mathbb{R}_+; B^{\frac{d}{2}-1} \cap B^{\frac{d}{2}})} \leq Cc_1,$$

Theorem

Soit $d \geq 3$ et les mêmes hypothèses sur les coefficients que dans le Théorème précédent. Soit $(\alpha_+^\nu, \alpha_-^\nu, \rho_+^\nu, \rho_-^\nu, u^\nu)$ la solution du problème de Cauchy (DBN), provenant du Théorème précédent et $(\alpha_+^\nu, \alpha_-^\nu, \rho_+^\nu, \rho_-^\nu, u^\nu)$ la solution du système de Kapila. Si on suppose que

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{\alpha_{+0}^\nu \rho_{+0}^\nu}{\alpha_{+0}^\nu \rho_{+0}^\nu + \alpha_{-0}^\nu \rho_{-0}^\nu} - \frac{\alpha_{+0} \rho_{+0}}{\alpha_{+0} \rho_{+0} + \alpha_{-0} \rho_{-0}}, P_{\pm 0}^\nu - P_{\pm 0}, u_0^\nu - u_0 \right) \right\|_{B^{\frac{d}{2} - \frac{3}{2}} \cap B^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}}} \\ & + \left\| P_{+0}^\nu - \frac{\gamma_+ \alpha_-^\nu P_+^\nu}{\gamma_+ \alpha_-^\nu P_+^\nu + \gamma_- \alpha_+^\nu P_-^\nu} (P_{+0}^\nu - P_{-0}^\nu) - P_{+0} \right\|_{B^{\frac{d}{2} - \frac{3}{2}} \cap B^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}}} \leq C\sqrt{\nu} \end{aligned}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de ν telle que $(\alpha_+^\nu, \alpha_-^\nu, \rho_+^\nu, \rho_-^\nu, u^\nu)$ converge vers $(\alpha_+, \alpha_-, \rho_+, \rho_-, u)$ au sens suivant :

$$\begin{aligned} & \left\| (\alpha_\pm^\nu - \alpha_\pm, \rho_\pm^\nu - \rho_\pm, \rho_-^\nu - \rho_-, u^\nu - u) \right\|_{L^\infty(B^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}})} + \left\| \rho_\pm^\nu - \rho_\pm \right\|_{L^2(B^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}})} \\ & + \left\| u^\nu - u \right\|_{L^1(B^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}})} \leq C\sqrt{\nu}. \end{aligned}$$

reformulation

Nous sommes capable de le réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t y + u \cdot \nabla y = 0, \\ \partial_t w + u \cdot \nabla w + (\bar{H}_1 + H_1(w, r, y)) \operatorname{div} u + (\bar{H}_2 + H_2(w, r, y)) \frac{w}{\nu} = 0, \\ \partial_t r + u \cdot \nabla r + (\bar{H}_3 + H_3(w, r, y)) \operatorname{div} u = (\bar{H}_4 + H_4(w, r, y)) \frac{w^2}{\nu}, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u - \frac{1}{\rho} \mathcal{A}_{\mu, \lambda} u + \eta u + \frac{1}{\rho} \nabla r + (\gamma_+ - \gamma_-) \frac{1}{\rho} \nabla w = 0, \end{array} \right. \quad (21)$$

Elements of proof

System (BN) can be recast into

$$\begin{cases} \partial_t y + u \cdot \nabla y = 0 \\ \partial_t w + u \cdot \nabla w + (h_1 + H_1) \operatorname{div} u + (h_2 + H_2) \frac{w}{\nu} = S_2, \\ \partial_t r + u \cdot \nabla r + (h_3 + H_3) \operatorname{div} u = S_3, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \eta u + (h_5 + H_5) \nabla r + (h_6 + H_6) \nabla w = S_4 \end{cases} \quad (22)$$

To obtain an a priori estimate for the last 3 equations, we derive in time the following functionals:

$$\mathcal{L}_j^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{h_6}{h_1} |w_j|^2 + \frac{h_5}{h_3} |r_j|^2 + |u_j|^2 + 2\varepsilon u_j \cdot \nabla r_j \right) \quad \text{for } j < 0.$$

$$\mathcal{L}_j^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{h_6 + H_6}{h_1 + H_1} |w_j|^2 + \frac{h_5 + H_5}{h_3 + H_3} |r_j|^2 + |u_j|^2 + 2\varepsilon 2^{-2j} u_j \cdot \nabla r_j \right) \quad \text{for } j \geq 0.$$

Elements of proof

Then, for $-\frac{d}{2} < s_1 \leq \frac{d}{2} - 1$ and $s_1 + 1 \leq s_2 \leq \frac{d}{2} + 1$, the following estimate holds:

$$\begin{aligned} & \| (w, r, u) \|_{L_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{s_1})}^\ell + \| (w, r, u) \|_{L_t^\infty(\dot{B}_{2,1}^{s_2})}^h + \kappa \left(\| (w, r, u) \|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{s_1+2})}^\ell + \| (w, r, u) \|_{L_t^1(\dot{B}_{2,1}^{s_2})}^h \right) \\ & + \int_0^t \| (\frac{w}{\nu}, \eta u, \partial_t w, \partial_t r, \partial_t u) \|_{\dot{B}_{2,1}^{s_1+1}}^\ell + \int_0^t \| (\frac{w}{\nu}, \eta u, \partial_t w, \partial_t r, \partial_t u) \|_{\dot{B}_{2,1}^{s_2-1}}^h \\ & \leq \exp\left(C(H(t) + V(t))\right) \left(\| (w_0, r_0, u_0) \|_{\dot{B}_{2,1}^{s_1} \cap \dot{B}_{2,1}^{s_2}} + \int_0^t \| (S_2, S_3, S_4) \|_{\dot{B}_{2,1}^{s_1} \cap \dot{B}_{2,1}^{s_2}} \right) \end{aligned}$$

where $V(t) := \int_0^t \| u \|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}$, $H(t) := \sum_{i=1}^6 \| \partial_t H_i(t) \|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}$ and $\kappa := \kappa(\varepsilon)$.

- Strength of this method: we can treat the singular relaxation limit problem as $\nu \rightarrow 0$.
- We are able to show rigorously that the so-called Kapilla system is obtained as a relaxation limit from the (BN) system and derive the convergence rate of this process.

$$\begin{cases} \alpha_+ + \alpha_- = 1, \\ \partial_t(\alpha_\pm \rho_\pm) + \operatorname{div}(\alpha_\pm \rho_\pm u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla P + \eta \rho u = 0, \\ \rho = \alpha_+ \rho_+ + \alpha_- \rho_-, \\ P = P_+(\rho_+) = P_-(\rho_-). \end{cases} \quad (K)$$

Denoting with an index ν the solution of (BN) , we are able to prove that

$$\begin{aligned} & \|(\alpha_\pm^\nu - \alpha_\pm, \rho_\pm^\nu - \rho_\pm, u^\nu - u)\|_{L^\infty(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}})} \\ & + \|\rho_\pm^\nu - \rho_\pm\|_{L^2(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}})} + \|u^\nu - u\|_{L^1(\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}})} \leq C\sqrt{\nu}. \end{aligned}$$

if the initial data of both systems are close enough with respect to $\sqrt{\nu}$.

- By interpolation one can recover a convergence rate of $\nu^{\frac{1}{3}}$ for the above quantities in $\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}$.

Estimation de décroissance

Theorem (C-B, Danchin '21)

Sous les hypothèses du théorème précédent et si $Z_0 \in \dot{\mathbb{B}}_{2,\infty}^{-\sigma_1}$ pour $\sigma_1 \in]-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$ alors, il existe une constante C dépendant seulement de σ_1 telle que

$$\|Z(t)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,\infty}^{-\sigma_1}} \leq C \|Z_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,\infty}^{-\sigma_1}}, \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, si $\sigma_1 > 1 - d/2$,

$$\langle t \rangle \triangleq \sqrt{1+t^2}, \quad \alpha_1 \triangleq \frac{\sigma_1 + \frac{d}{2} - 1}{2} \quad \text{et} \quad C_0 \triangleq \|Z_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,\infty}^{-\sigma_1}}^\ell + \|Z_0\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^h,$$

alors la solution Z vérifie les estimations de décroissance suivantes :

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \langle t \rangle^{\frac{\sigma+\sigma_1}{2}} Z(t) \right\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^\sigma}^\ell \leq CC_0 \quad \text{si} \quad -\sigma_1 < \sigma \leq d/2 - 1,$$

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \langle t \rangle^{\frac{\sigma+\sigma_1}{2} + \frac{1}{2}} Z_2(t) \right\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^\sigma}^\ell \leq CC_0 \quad \text{si} \quad -\sigma_1 < \sigma \leq d/2 - 2,$$

$$\text{et} \quad \sup_{t \geq 0} \left\| \langle t \rangle^{2\alpha_1} Z(t) \right\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^h \leq CC_0.$$

- La décroissance est essentiellement dicté par le comportement des basses fréquences. Pour dériver un taux de décroissance, il faut supposer une hypothèse plus forte sur les basses fréquences : $(n_0, u_0) \in \dot{B}_{2,\infty}^{-\sigma_1}$ pour $\sigma_1 \in]-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$.
- Dans le cas $\sigma_1 = d/2$, cette condition est directement liée à la condition classique L^1 dans les travaux de Matsamura et Nishida via l'injection $L^1 \hookrightarrow \dot{B}_{2,\infty}^{-\frac{d}{2}}$.
- Nous sommes en mesure d'obtenir des estimations de décroissance sans condition supplémentaire de petitesse. Inspiré par les travaux de Guo-Wang '12 et Xin-Xu '21.

Idée de la preuve

- Étape 1. Préservation de la régularité négative supplémentaire pour les basses fréquences au cours du temps

$$\|(n, u)(t)\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{-\sigma_1}} \leq \|(n_0, u_0)\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{-\sigma_1}} \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

- Étape 2. La fonctionnelle de Lyapunov vérifie

$$\mathcal{L}(t) + c' \int_0^t \mathcal{H} \leq \mathcal{L}(0).$$

Pour $t_0 \geq 0$ on peut obtenir :

$$\mathcal{L}(t_0 + h) + c' \int_{t_0}^{t_0+h} \mathcal{H} \leq \mathcal{L}(t_0), \quad h \geq 0.$$

Cela nous assure que \mathcal{L} est décroissance sur \mathbb{R}^+ (et donc différentiable presque partout) et que pour tout $t_0 \geq 0$ et $h > 0$,

$$\frac{\mathcal{L}(t_0 + h) - \mathcal{L}(t_0)}{h} + c' \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \mathcal{H} \leq 0.$$

Alors, en passant à la limite lorsque $h \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} + c' \mathcal{H} \leq 0 \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^+ \quad (23)$$

avec

$$\mathcal{L} \sim \|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}^\ell + \|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^h \quad \text{et} \quad \mathcal{H} \sim \|Z_2\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^\ell + \|Z_1\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+2}}^\ell + \|Z_1\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^h$$

- Étape 3. obtenir une borne inférieure sur \mathcal{H} par interpolation :

$$\|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}^\ell \lesssim \left(\|Z\|_{\dot{B}_{2,\infty}^{-\sigma_1}}^\ell \right)^\theta \left(\|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+2}}^\ell \right)^{1-\theta} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{2}{\frac{d}{2} + 2 + \sigma_1}$$

Donc

$$\|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+2}}^\ell \geq c C_0^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \left(\|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}}}^\ell \right)^{\frac{1}{1-\theta}}$$

et

$$\|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^h \geq c C_0^{-\frac{\theta}{1-\theta}} \left(\|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}^\ell \right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

- Étape 4. Inégalité différentielle.

En rassemblant les point précédents, on arrive à

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} + c_0 \mathcal{L}^{\frac{1}{1-\theta}} \leq 0.$$

Et donc

$$\mathcal{L} \leq (1 + c_0' t)^{1-\frac{1}{\theta}} \mathcal{L}(0).$$

En utilisant que $\mathcal{L} \sim \|Z\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}}$, on obtient

$$\|Z(t)\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}} \leq C(1+t)^{-\alpha_1} \|Z_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}} \cap \dot{B}_{2,1}^{\frac{d}{2}+1}} \quad \text{with} \quad \alpha_1 \triangleq \frac{1}{2} \mathbb{B}igl(\sigma_1 + \frac{d}{2} \mathbb{B}igr).$$

- Étape 5. Amélioration du taux de décroissance de Z_2 en basses fréquences.
- Étape 6: Amélioration du taux de décroissance en hautes fréquences.

Proposition (Lois de produit et estimation de commutateur)

Pour $2 \leq p \leq 4$, $p^* := \frac{2p}{p-2} \geq p$ et $\sigma \geq s > 0$,

$$\|ab\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^s}^h \lesssim \|a\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}}} \|b\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^s}^h + \|b\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}}} \|a\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^s}^h + \|a\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p} - \frac{d}{p^*}}}^\ell \|b\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^\sigma}^\ell + \|b\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p} - \frac{d}{p^*}}}^\ell \|a\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^\sigma}^\ell$$

Soit $R_j \triangleq \dot{S}_{j-1} w \dot{\Delta}_j z - \dot{\Delta}_j (wz)$. Il existe une constante C telle que

$$\sum_{j \geq j_0} \left(2^{js} \|\mathfrak{R}_j\|_{L^2} \right) \leq C \mathbb{B}igl \left(\|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p}}} \|z\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^s}^h + \|z\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p} - \frac{d}{p^*}}}^\ell \|w\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\sigma_1}}^\ell \right. \\ \left. + \|z\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p} - k}} \|w\|_{\dot{\mathbb{B}}_{2,1}^{s+k}}^h + \|z\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\sigma_2}}^\ell \|\nabla w\|_{\dot{\mathbb{B}}_{p,1}^{\frac{d}{p} - \frac{d}{p^*}}}^\ell \mathbb{B}igr \right),$$

pour tout $k \geq 0$, $\sigma_1 \geq s$ et $\sigma_2 \in \mathbb{R}$.